O układzie współrzędnych

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Spis tresci

Spis tresci

Wprowadzenie

Wprowadzenie

Każdy z was na pewno w swoim życiu widział mapę. W naturalny sposób powstaje pytanie po co w ogóle są mapy? Najbardziej prostą odpowiedzią jest to, że pomagają w przemieszczaniu się. Inną funkcją, jaką może pełnić mapa jest określanie swojego położenia, czy też położenia innych obiektów na kuli ziemskiej.Służą do tego dwie liczby: długość i szerokość geograficzna. Tak więc poprzez parę dwóch liczb możemy w miarę precyzjnie określić położenie dowolnego obiektu. Jako, że większość ludzi twierdzi, że to potrzeba jest matką wynalazku i nie warto tracić czasu na rzeczy zbędne powstaje więc kolejne pytanie do czego ten wynalazek może się przydać?

Wprowadzenie

Wprowadzenie

Otóż, wyobraźmy sobie, że płyniemy na morzu i musimy wezwać pomoc i mamy urządzenie, które pozwala nam określić długość i szerokość geograficzną miejsca, w którym się znajdujemy. Wówczas podając te wartości jesteśmy w stanie ściągnąć pomoc dokładnie w miejsce zdarzenia. Więc jest to rzecz bardzo użyteczna.
Za prekursorów tego pomysłu uważani są Kartezjusz (wł. René Descartes) i Pierre de Fermat.

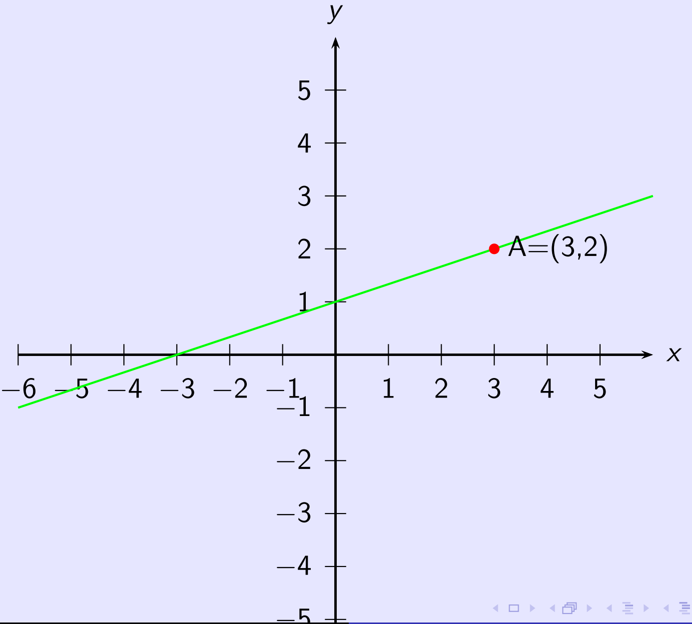
René Descartes, (ur. 31 marca 1596 w La Haye, zm. 11 lutego 1650 w Sztokholmie) francuski filozof, matematyk i fizyk, jeden z najwybitniejszych uczonych XVII w., uznawany również za ojca filozofii nowożytnej.

Pierre de Fermat (ur. 17 sierpnia 1601 w Beaumont-de-Lomagne, zm. 12 stycznia 1665 w Castres) matematyk (samouk) francuski, z wykształcenia prawnik i lingwista.

Wprowadzenie

Wprowadzenie

Pomysł choć z pozoru prosty ma nietrywialne zastosowania. Na czym więc on polega? Mianowicie: wybieramy dowolny punkt na płaszczyźnie i prowadzimy dwie proste wzajemnie prostopadłe przechodzące przez ten punkt. Punkt ten nazywamy początkiem układu współrzędnych a proste te osiami układu współrzędnych. Oś pionowa nazywana jest osią **rzędnych** a oś pozioma osią **odciętych.**


y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
A=(3,2)

Podstawowe własności

Wprowadzenie układu współrzędnych pozwala na zdefiniowanie wielu figur za pomocą równań i nierówności algebraicznych.
Na przykład zbiór punktów na płaszczyźnie, których współrzędne (x,y) spełniają równanie

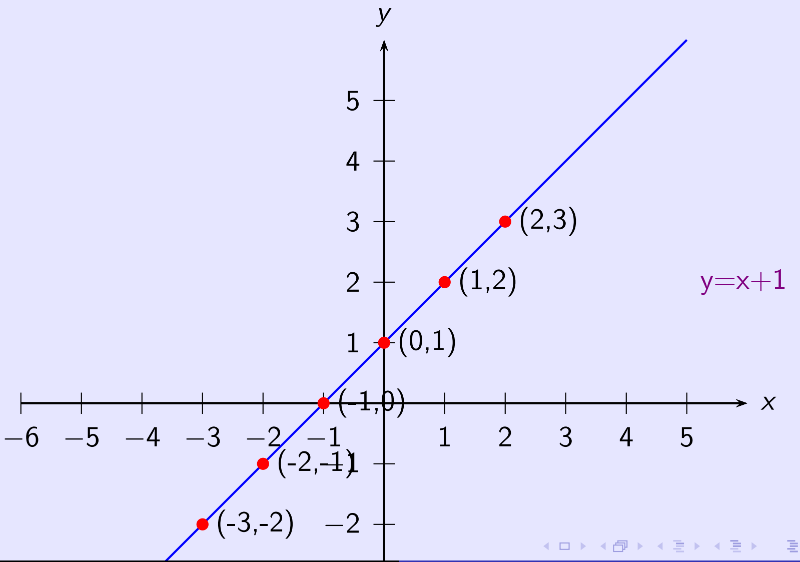
$$y = x + 1$$

przedstawia prostą.

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

Tablica: Tabela dla prostej $y = x + 1$.

Podstawowe własności



Podstawowe własności

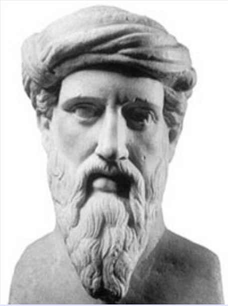
Równanie prostej $y = x + 1$, której wykres został przedstawiony na poprzednim slajdzie, można zapisać nieco inaczej w następującej postaci

$$-x + y - 1 = 0.$$

Powyższy zapis to szczególny przypadek ogólnego równania prostej, gdyż można pokazać, że każde równanie postaci $Ax + By + C = 0$, (gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$) przedstawia pewną prostą na płaszczyźnie.

Twierdzenie Pitagorasa

Zanim przejdziemy do dalszej części naszej prezentacji, będziemy musieli przedstawić twierdzenie o którym zapewne każdy z Was słyszał a jeśli nie każdy to zapewne większość z Was.
Chodzi mianowicie o **Twierdzenie Pitagorasa**.
Twierdzenie to jest podstawowym narzędziem do wprowadzenia wzoru na odległość pomiędzy dwoma punktami na płaszczyźnie.



Pitagoras (ur. ok. 572 p.n.e. na Samos lub w Sydonie, zm. ok. 497 p.n.e. w Metaponcie) grecki matematyk, filozof, mistyk.

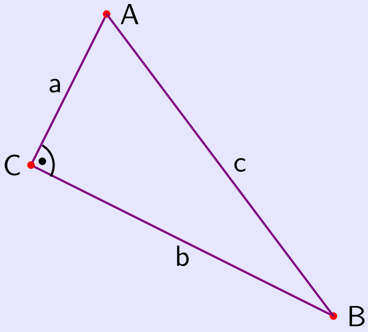
Twierdzenie Pitagorasa

Przejdźmy więc do sformułowania tego Twierdzenia.

Twierdzenie Pitagorasa. Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem o bokach długości a, b, c przy czym $a, b \leqslant c$. Wówczas trójkąt $\triangle ABC$ jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

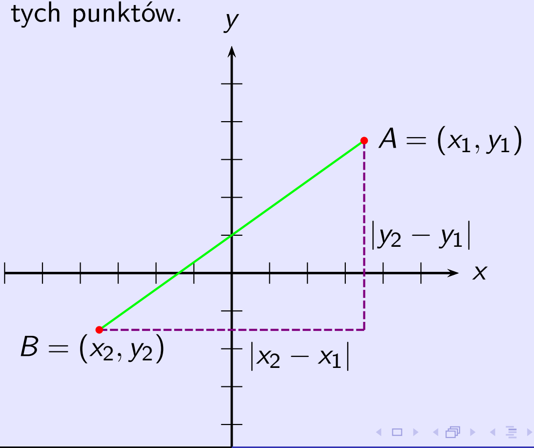
$$|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2 = c^2 = a^2 + b^2$$



Rysunek: Plot of a line

Odległość w układzie współrzędnych

Opierając się na Twierdzeniu Pitagorasa można wprowadzić wzór na odległość pomiędzy dwoma punktami $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ na płaszczyźnie, wyrażający tę odległość jedynie przy pomocy współrzędnych tych punktów.



Odległość w układzie współrzędnych

Uwaga 1. Symbolem $|x|$ oznaczamy wartość bezwzględną z liczby x, która z definicji jest równa liczbie x, gdy liczba x jest nieujemna, a w przypadku, gdy liczba x jest ujemna, to jej wartość bezwzględna wynosi $-x$.

Uwaga 2. Pierwiastkiem arytmetycznym stopnia 2 z liczby nieujemnej a, nazywamy jedyną nieujemną liczbę rzeczywistą x dla której prawdą jest, że $x^2 = a$. Liczbę tę oznaczamy $x = \sqrt{a}$.

Uwaga 3. Prawdziwa jest zatem równość

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Odległość w układzie współrzędnych

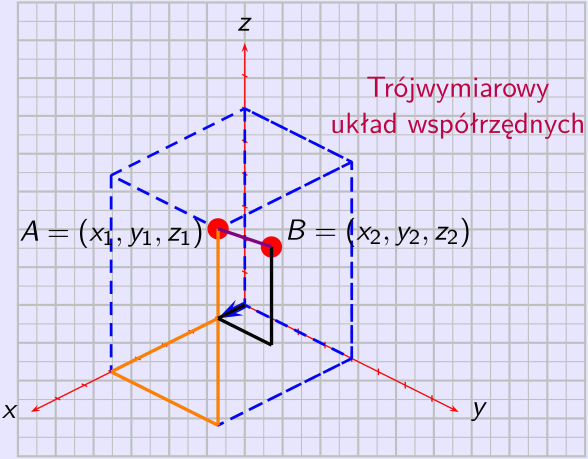
Z Twierdzenia Pitagorasa mamy

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

skąd otrzymujemy, wzór na odległość pomiędzy punktami A i B w kartezjańskim układzie współrzędnych, która wyraża się następującym wzorem:

$$|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Odległość w układzie współrzędnych



Odległość w układzie współrzędnych

Przez analogie można podać wzór na odległość pomiędzy dwoma punktami $A = (x_1, y_1, z_1)$ oraz $B = (x_2, y_2, z_2)$ w przestrzeni trójwymiarowej. Mianowicie:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Przykłady

Przykład 1. Chcemy obliczyć długość odcinka $\overline{AB}$, jeżeli A, B są punktami w kartezjańskim układzie współrzędnych,
$A = (1, 1), B = (-7, -20)$.
Z wzoru na odległość mamy

$$|AB| = \sqrt{(-7-1)^2 + (-20-1)^2} = \sqrt{64 + 441} = \sqrt{505} \approx 22.47$$

Przykład 2. Chcemy wyznaczyć równanie okręgu w kartezjańskim dwuwymiarowym układzie współrzędnych, którego środek znajduje się w punkcie $S = (1, 2)$ a promień jest równy 3.
Wiadomo, że okrąg to zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, których odległość od środka jest równa promieniowi. Zatem punkt $A = (x, y)$ będzie leżał na naszym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy

Przykłady

$$|SA| = 3$$

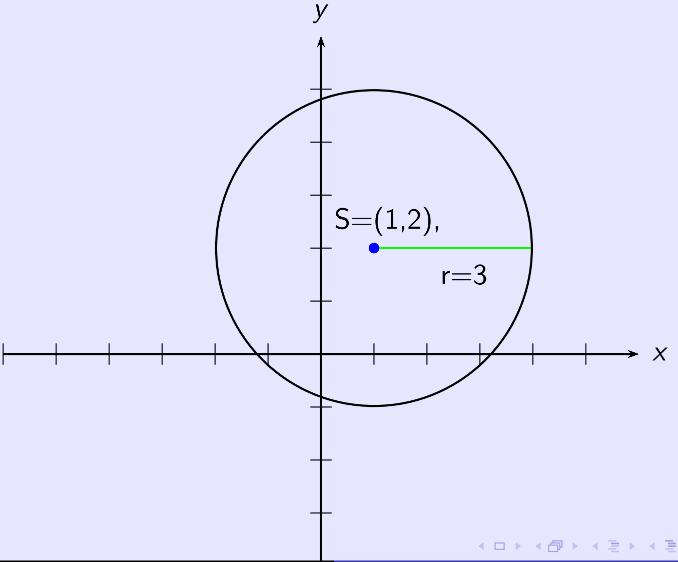
co po skorzystaniu z wzoru na odległoś daje

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 3$$

skąd po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy równanie naszego okręgu w postaci

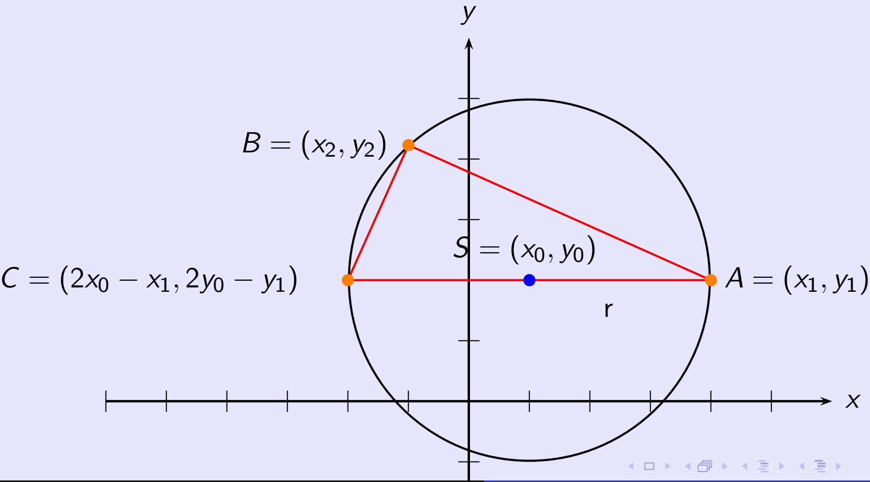
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

Przykłady



Przykłady

Przykład 3. Udowodnimy, że kąt środkowy oparty na średnicy ma miarę 90^o. Wykorzystamy w tym celu układ współrzędnych.



Bez straty ogólności możemy założyć, że $S = (0, 0)$. Wówczas $C = (-x_1, -y_1)$ zatem

$$|AB|^2 + |BC|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 =$$

$$= 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_2^2)^2 = 2r^2 + 2r^2 = (2r)^2 = |CA|^2$$

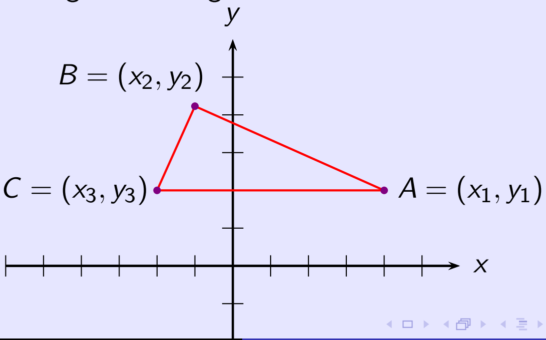
skąd korzystając z Twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $|\angle ABC| = 90^o$.

Przykłady

Przykład 2. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie $\triangle ABC$ zachodzi nierówność

$$|AB| + |BC| \geqslant |CA|$$

Uwaga. Powyższa nierówność nosi nazwę nierówności trójkąta i orzeka, że suma długości dowolych dwóch boków trójkąta jest niemniejsza niż długość trzeciego boku.



Przykłady

Mamy

$$|AB|+|BC| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$$

Przyjmijmy oznaczenia

$u = x_2 - x_1, v = y_2 - y_1, t = x_3 - x_2, z = y_3 - y_2,$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{t^2+z^2} \geqslant \sqrt{(u+t)^2+(v+z)^2}$$

Podnosząc do kwadratu otrzymamy

$$u^2+v^2+t^2+z^2+2\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{t^2+z^2} \geqslant (u+t)^2+(v+z)^2$$

skąd

$$u^2+v^2+t^2+z^2+2\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{t^2+z^2} \geqslant u^2+v^2+t^2+z^2+2ut+2vz$$

co po redukcji daje

$$\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{t^2+z^2} \geqslant ut+vz$$

Przykłady

Podnoszą raz jeszcze do kwadratu otrzymujemy

$$(u^2 + v^2)(t^2 + z^2) \geqslant u^2t^2 + v^2z^2 + 2uvtz$$

co po redukcji daje

$$u^2z^2 + v^2t^2 - 2uvtz \geqslant 0$$

czyli

$$(uz - vt)^2 \geqslant 0.$$

Ponieważ ostatnia nierówność jest prawdziwa, wiąc dowód jest zakończony.

Przykłady

Uwaga. W powyższym rozumowaniu korzystaliśmy z tzw. wzorów skróconego mnożenia tj.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

W dalszej części tej prelekcji będzie nam potrzebne pojęcie macierzy i wyznacznika. Ograniczymy się przy tym do macieży i wyznaczników stopnia co najwyżej 3. Choć pojęcia te brzmią groźnie i “pachną “ matematyką “wyższą “ od której lepiej trzymać się z dala, to raczej nie są takie skomplikowane, gdyż macierz kwadratowa, to po prostu tablica kwadratowa, z wpisanymi w nią liczbami.

Przykłady

Wyznacznik macieży stopnia drugiego definiujemy następująco

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

A wyznacznik macierzy stopnia trzeciego można zdefiniować w następujący sposób

$$\det \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \det \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \cdot \det \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot \det \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Przykłady

Na zakończenie podamy jeszcze wzór na pole trójkąta $\triangle ABC$ o wierzchołkach w punktach $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$, przy użyciu wyznacznika, mianowicie

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

Dziękuję za uwagę

Kinga Kolczyńska - Przybycień